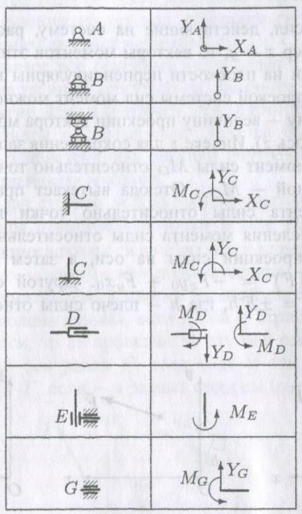
Напомним, что вектор силы является вектором скользящим [1]. В зависимости от знака момента пары на плоскости изображать пару будем изогнутой стрелкой или . Вектор пары перпендикулярен ее плоскости. Для решения задач о равновесии тел или системы тел необходимо выделить тело, равновесие которого изучается. Связи заменяем их реакциями. Основные виды связей в плоских задачах и их реакции даны в таблице 1.

Таблица 1



Неподвижный шарнир A имеет две реакции (первая строка таблицы). Подвижная опора имеет одну реакцию, перпендикулярную плоскости опоры (вторая и третья строки таблицы — опора B). В условиях задач предполагается, что все связи двусторонние, т. е. предусмотрено некоторое ограничение (на рисунке не показано), не позволяющее подвижным опорам отрываться от поверхности. Заделка C имеет три реакции, включая реактивный момент. Момент направляем так, чтобы он был против часовой стрелки.

[1] Изложение основных теорем статики в терминах скользящих векторов дано в учебнике Ю.Ф.Голубева [10].

При разбиении составной конструкции по внутренней связи (скользящей заделке D) к каждой из частей прикладываем реакции — взаимно противоположные силы, перпендикулярные оси скольжения, и моменты. Заделка с двойным скольжением E имеет только одну реакцию — момент. В скользящей заделке G возникает реактивный момент и сила, перпендикулярная направлению скольжения.

Задачи статики, как правило, сводятся к решению систем линейных уравнений. Часть работы по составлению и решению уравнений можно поручить Maple [21]. Вот пример простейшей программы:

```
eq1:=Xa*2+Ya*9=198:
eq2:=Xa*2+Ya*4=68:
solve({eq1,eq2},{Xa,Ya});
```

Почти так же записывается программа для решения уравнений в системе Maxima:

```
eq1:Xa*2+Ya*9=198;
eq2:Xa*2+Ya*4=68;
solve([eq1,eq2],[Xa,Ya]);
```

Разница в записи, как видно, небольшая.

Особенно эффективно такое решение для систем большого порядка. В задачах с тремя телами C9 – C11 система может содержать (в зависимости от выбранного способа решения) до 11 уравнений, в ферме C13 — 16 уравнений, если использовать метод вырезания узлов.

Записывать уравнение на компьютере, а не на бумаге, очень удобно. Во-первых, компьютер выполняет математические действия, часто весьма громоздкие. Во-вторых, в случае ошибки в уравнениях, все можно поправить и сразу же пересчитать. В-третьих, решение легко оформить, распечатав его на принтере. Можно вывести график, таблицу результатов и т. д. Текст программы для Maple и Maxima легко конвертируется в HTML или LaTeX [20].

C1. Равновесие рамы

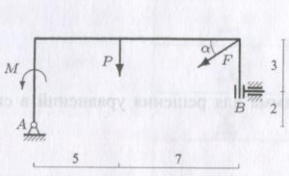
К плоской раме, представляющей собой твердое тело, приложены силы и момент. Опоры у рамы содержат три неизвестные реакции: две силы и момент или три силы. Это самая простая задача статики для плоской системы произвольных сил. Трудности при решении в основном здесь возникают при идентификации опор (выбор реакций и их направлений) и при составлении уравнений моментов. Отметим, что связи в этой задаче двусторонние, поэтому не надо беспокоиться о возможном отрыве рамы от опорной плоскости, если таковая имеется. Кроме того, вес рамы в задачах не учитывается.

В сборнике [19] есть аналогичная задача C1 с ответами.

Условия задач

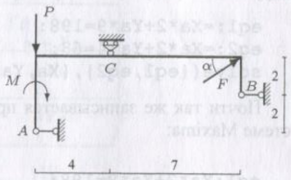
Рама представляет собой плоскую конструкцию, состоящую из жестко соединенных под прямым углом стержней. Рама имеет две или три опоры (см. табл. 1, с. 10). На раму действуют вертикальная сила $\vec{P}$, наклонная сила $\vec{F}$ и момент M. Размеры даны в метрах, $\cos\alpha = 0{,}8$. Определить реакции опор рамы.

C1.1.



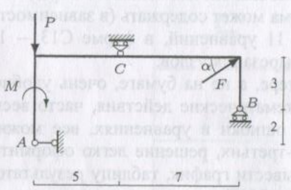
$F = 40\,\text{Н}$, $P = 5\,\text{Н}$, $M = 17\,\text{Нм}$.

C1.2.



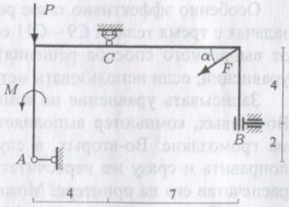
$F = 10\,\text{Н}$, $P = 3\,\text{Н}$, $M = 12\,\text{Нм}$.

C1.3.



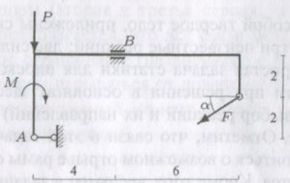
$F = 35\,\text{Н}$, $P = 3\,\text{Н}$, $M = 15\,\text{Нм}$.

C1.4.



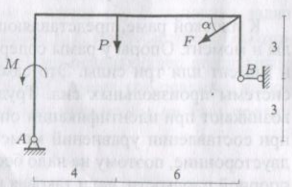
$F = 35\,\text{Н}$, $P = 3\,\text{Н}$, $M = 17\,\text{Нм}$.

C1.5.



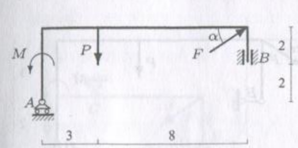
$F = 25\,\text{Н}$, $P = 30\,\text{Н}$, $M = 7\,\text{Нм}$.

C1.6.



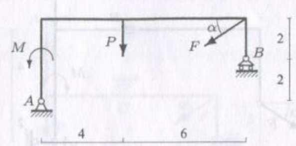
$F = 15\,\text{Н}$, $P = 4\,\text{Н}$, $M = 16\,\text{Нм}$.

C1.7.



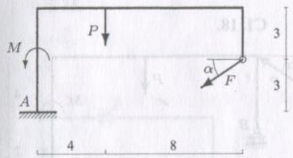
$F = 5\,\text{Н}$, $P = 2\,\text{Н}$, $M = 5\,\text{Нм}$.

C1.8.



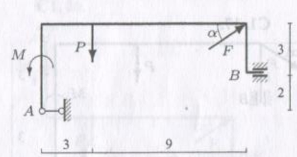
$F = 50\,\text{Н}$, $P = 5\,\text{Н}$, $M = 20\,\text{Нм}$.

C1.9.



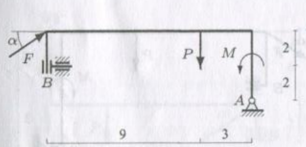
$F = 50\,\text{Н}$, $P = 3\,\text{Н}$, $M = 9\,\text{Нм}$.

C1.10.



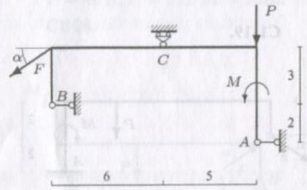
$F = 30\,\text{Н}$, $P = 1\,\text{Н}$, $M = 11\,\text{Нм}$.

C1.11.



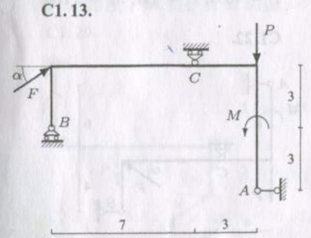
$F = 25\,\text{Н}$, $P = 2\,\text{Н}$, $M = 16\,\text{Нм}$.

C1.12.



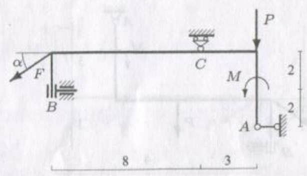
$F = 10\,\text{Н}$, $P = 5\,\text{Н}$, $M = 25\,\text{Нм}$.

C1.13.



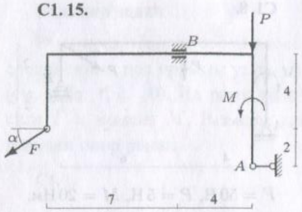
$F = 35\,\text{Н}$, $P = 3\,\text{Н}$, $M = 9\,\text{Нм}$.

C1.14.



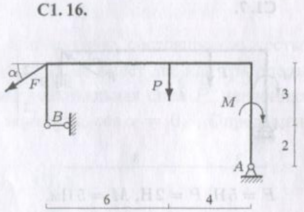
$F = 25\,\text{Н}$, $P = 4\,\text{Н}$, $M = 15\,\text{Нм}$.

С1.15.



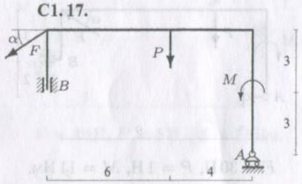
$F = 30$ Н, $P = 6$ Н, $M = 7$ Нм.

С1.16.



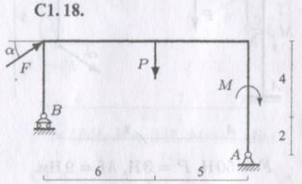
$F = 5$ Н, $P = 2$ Н, $M = 8$ Нм.

С1.17.



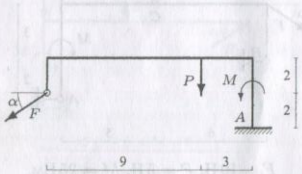
$F = 20$ Н, $P = 3$ Н, $M = 5$ Нм.

С1.18.



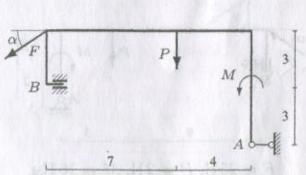
$F = 55$ Н, $P = 4$ Н, $M = 20$ Нм.

С1.19.



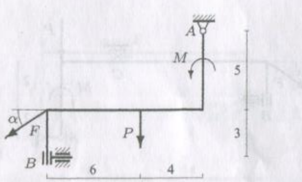
$F = 20$ Н, $P = 4$ Н, $M = 7$ Нм.

С1.20.



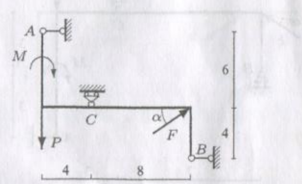
$F = 45$ Н, $P = 4$ Н, $M = 9$ Нм.

С1.21.



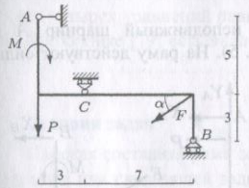
$F = 70$ Н, $P = 3$ Н, $M = 7$ Нм.

С1.22.



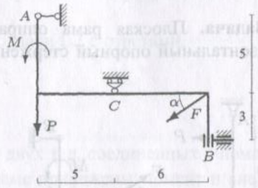
$F = 50$ Н, $P = 1$ Н, $M = 4$ Нм.

С1.23.



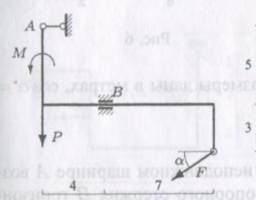
$F = 35$ Н, $P = 1$ Н, $M = 3$ Нм.

С1.24.



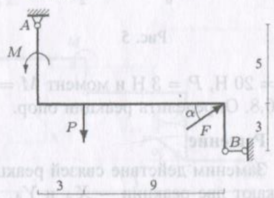
$F = 30$ Н, $P = 5$ Н, $M = 16$ Нм.

С1.25.



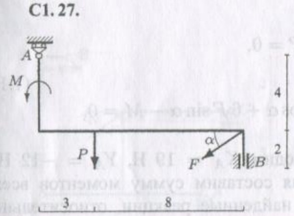
$F = 30$ Н, $P = 24$ Н, $M = 7$ Нм.

С1.26.



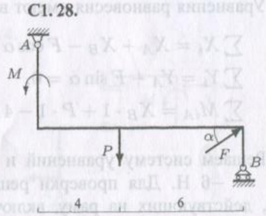
$F = 40$ Н, $P = 3$ Н, $M = 9$ Нм.

С1.27.



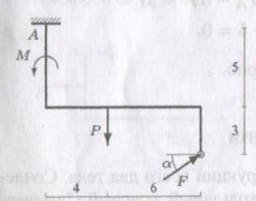
$F = 20$ Н, $P = 3$ Н, $M = 5$ Нм.

С1.28.



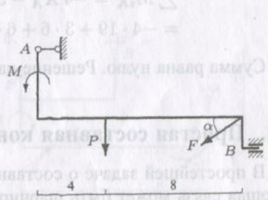
$F = 50$ Н, $P = 3$ Н, $M = 12$ Нм.

С1.29.



$F = 15$ Н, $P = 2$ Н, $M = 4$ Нм.

С1.30.



$F = 30$ Н, $P = 2$ Н, $M = 5$ Нм.

Пример решения

Задача. Плоская рама опирается на неподвижный шарнир A и горизонтальный опорный стержень B (рис. 5). На раму действуют силы

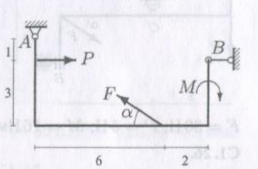


Рис. 5

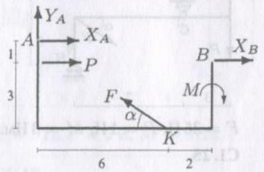


Рис. 6

$F = 20$ Н, $P = 3$ Н и момент $M = 5$ Нм. Размеры даны в метрах, $\cos\alpha = 0{,}8$. Определить реакции опор.

Решение

Заменим действие связей реакциями. В неподвижном шарнире A возникают две реакции — X_A и Y_A. Реакция опорного стержня B горизонтальная (рис. 6).

Уравнения равновесия имеют вид

$$\begin{aligned}
&\sum X_i = X_A + X_B - F\cos\alpha + P = 0,\\
&\sum Y_i = Y_A + F\sin\alpha = 0,\\
&\sum M_{iA} = X_B\cdot 1 + P\cdot 1 - 4\,F\cos\alpha + 6\,F\sin\alpha - M = 0.
\end{aligned}\tag{1.1}$$

Решаем систему уравнений и находим $X_A = 19$ Н, $Y_A = -12$ Н, $X_B = -6$ Н. Для проверки решения составим сумму моментов всех сил, действующих на раму, включая найденные реакции, относительно произвольной точки, например, K (точки приложения наклонной силы):

$$\begin{aligned}
\sum M_{iK} &= -4\,X_A - 3\,X_B - 6\,Y_A - 3\,P - M =\\
&= -4\cdot 19 + 3\cdot 6 + 6\cdot 12 - 9 - 5 = 0.
\end{aligned}$$

Сумма равна нулю. Решение найдено верно.

С2. Простая составная конструкция

В простейшей задаче о составной конструкции всего два тела. Сочленяющая связь может быть шарниром или скользящей заделкой ("штекер-вилка"). Внешние опоры — подвижные или неподвижные шарниры, заделка или скользящая заделка (см. табл. 1, с. 10). Связи предполагаются

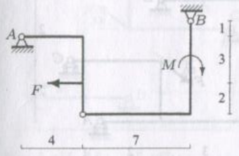
двусторонними. Все задачи допускают решение из условия выполнения всего четырех уравнений равновесия.

В сборнике [19] есть аналогичные задачи С2 с ответами.

Условия задач

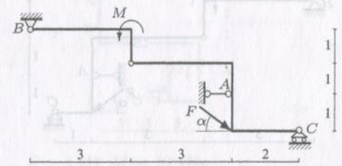
Плоская составная рама состоит из двух тел, соединенных с помощью шарнира или скользящей заделки. К раме приложены момент и внешняя сила, $\cos\alpha = 0{,}8$. Размеры даны в метрах. Определить реакции опор.

С2.1.



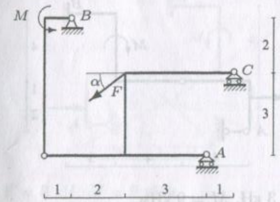
$F = 3$ кН, $M = 1$ кНм.

С2.2.



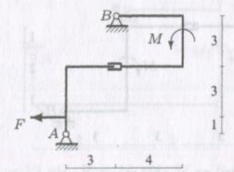
$F = 5$ кН, $M = 6$ кНм.

С2.3.



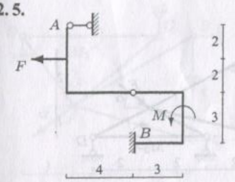
$F = 20$ кН, $M = 77$ кНм.

С2.4.



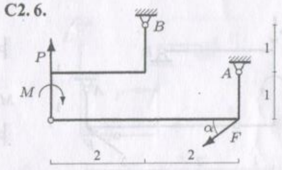
$F = 2$ кН, $M = 1$ кНм.

С2.5.



$F = 2$ кН, $M = 1$ кНм.

С2.6.



$P = 12$ кН, $F = 15$ кН, $M = 12$ кНм.

не изменятся. Пусть после разбиения сила F будет приложена к правой части.

Составим уравнения равновесия для части ABE (рис. 16), выбрав основную форму уравнений [1] — два уравнения проекций и уравнение моментов относительно произвольной точки, например, E:

$$\sum X_i = X_A + X_B + X_E = 0, \tag{1.10}$$
$$\sum Y_i = Y_E = 0, \tag{1.11}$$
$$\sum M_{iE} = -2\,X_A + 4\,X_B - M_1 = 0. \tag{1.12}$$

Составим уравнения равновесия для части CDE (рис. 17):

$$\sum X_i = -X_E + F = 0, \tag{1.13}$$
$$\sum Y_i = Y_C + Y_D - Y_E = 0, \tag{1.14}$$
$$\sum M_{iE} = 4\,Y_D - M_2 = 0. \tag{1.15}$$

Решаем систему уравнений (1.10) – (1.15), получаем следующие значения: $X_A = -3$ кН, $X_B = -1$ кН, $X_E = 4$ кН, $Y_E = 0$, $Y_D = 2$ кН, $Y_C = -2$ кН.

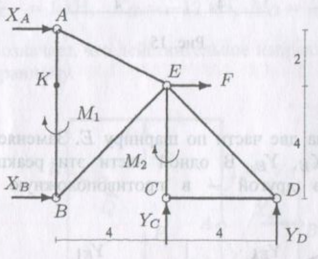


Рис. 18

Проверка. Рассмотрим равновесие конструкции в целом (рис. 18). Приложим к раме найденные реакции опор и внешние силы. Составим уравнение равновесия — сумму моментов относительно точки K. Реакции связи в сочленяющем шарнире E являются внутренними и в уравнение равновесия системы в целом не входят:

$$\sum M_{iK} = 4X_B - 2X_A + 4Y_C + 8Y_D - M_1 - M_2 = -4 + 6 - 8 + 16 - 2 - 8 = 0.$$

[1] Другие варианты системы уравнений см. в примечаниях на с. 24.

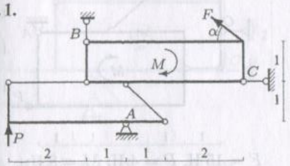
Проверка выполнена, реакции найдены верно. Заметим, что для определения четырех внешних реакций в данной задаче можно обойтись четырьмя уравнениями. Подсказка: система уравнений распадется на две системы уравнений по две неизвестной в каждой. Одно уравнение моментов, другое — проекций.

С3. Система двух тел. Пластина и уголок

Условия задач

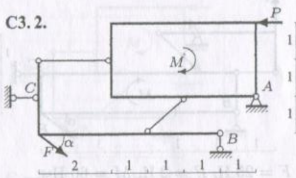
Конструкция состоит из прямоугольной пластины и жесткого уголка, изогнутого под прямым углом. Тела соединены двумя невесомыми стержнями. Определить реакции опор конструкции (в ньютонах). Размеры даны в метрах, $\cos\alpha = 0{,}8$.

С3. 1.



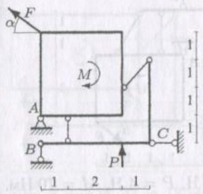
$F = 10$ Н, $P = 1$ Н, $M = 18$ Нм.

С3. 2.



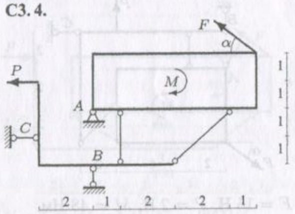
$F = 10$ Н, $P = 1$ Н, $M = 2$ Нм.

С3. 3.



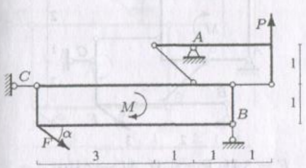
$F = 25$ Н, $P = 1$ Н, $M = 60$ Нм.

С3. 4.



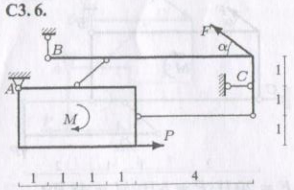
$F = 25$ Н, $P = 4$ Н, $M = 129$ Нм.

С3. 5.



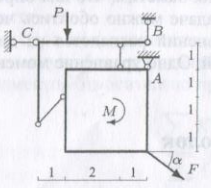
$F = 30$ Н, $P = 1$ Н, $M = 72$ Нм.

С3. 6.



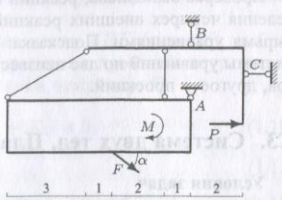
$F = 5$ Н, $P = 2$ Н, $M = 4$ Нм.

С3.7.



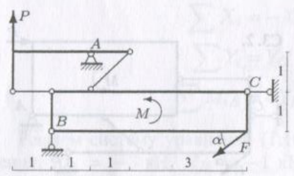
$F = 10$ Н, $P = 1$ Н, $M = 24$ Нм.

С3.8.



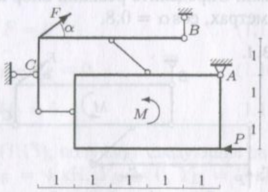
$F = 20$ Н, $P = 2$ Н, $M = 67$ Нм.

С3.9.



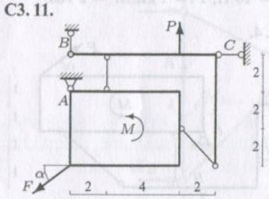
$F = 25$ Н, $P = 2$ Н, $M = 60$ Нм.

С3.10.



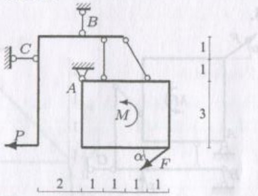
$F = 15$ Н, $P = 4$ Н, $M = 8$ Нм.

С3.11.



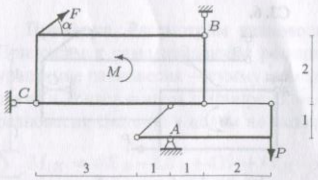
$F = 15$ Н, $P = 2$ Н, $M = 48$ Нм.

С3.12.



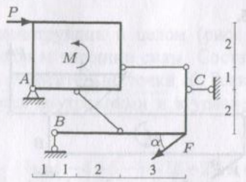
$F = 15$ Н, $P = 4$ Н, $M = 70$ Нм.

С3.13.



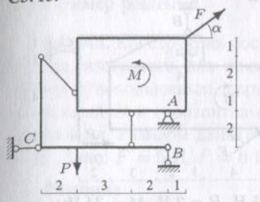
$F = 20$ Н, $P = 5$ Н, $M = 48$ Нм.

С3.14.



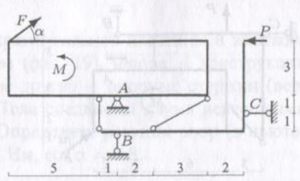
$F = 5$ Н, $P = 1$ Н, $M = 3$ Нм.

С3.15.



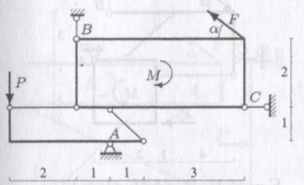
$F = 5$ Н, $P = 2$ Н, $M = 13$ Нм.

С3.16.



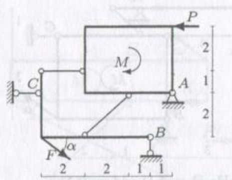
$F = 10$ Н, $P = 3$ Н, $M = 58$ Нм.

С3.17.



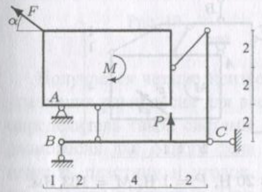
$F = 15$ Н, $P = 11$ Н, $M = 36$ Нм.

С3.18.



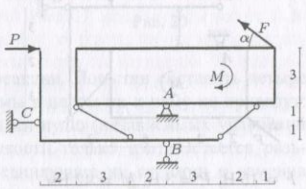
$F = 5$ Н, $P = 3$ Н, $M = 9$ Нм.

С3.19.



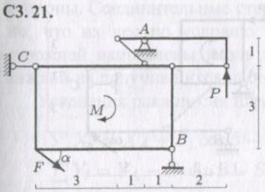
$F = 5$ Н, $P = 4$ Н, $M = 13$ Нм.

С3.20.



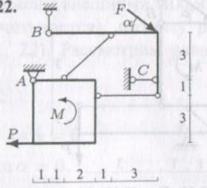
$F = 5$ Н, $P = 1$ Н, $M = 28$ Нм.

С3.21.



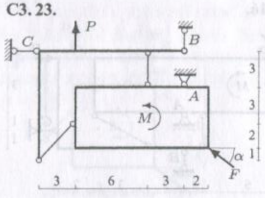
$F = 5$ Н, $P = 6$ Н, $M = 12$ Нм.

С3.22.



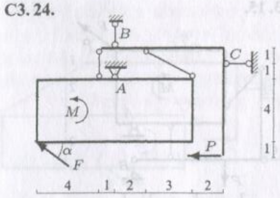
$F = 5$ Н, $P = 3$ Н, $M = 12$ Нм.

С3. 23.



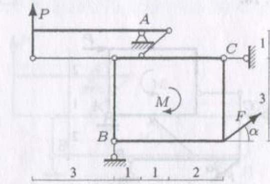
$F = 5$ Н, $P = 3$ Н, $M = 14$ Нм.

С3. 24.



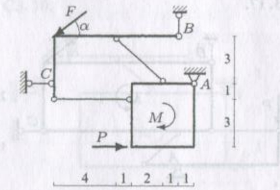
$F = 5$ Н, $P = 2$ Н, $M = 34$ Нм.

С3. 25.



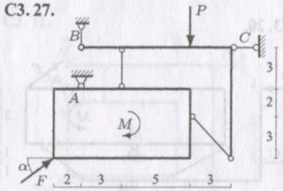
$F = 5$ Н, $P = 4$ Н, $M = 9$ Нм.

С3. 26.



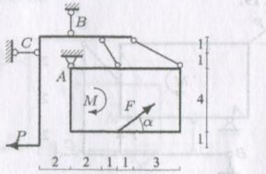
$F = 15$ Н, $P = 1$ Н, $M = 4$ Нм.

С3. 27.



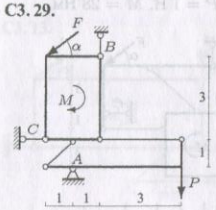
$F = 15$ Н, $P = 3$ Н, $M = 42$ Нм.

С3. 28.



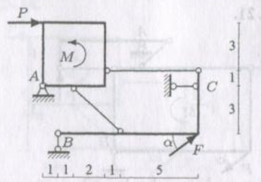
$F = 20$ Н, $P = 1$ Н, $M = 103$ Нм.

С3. 29.



$F = 15$ Н, $P = 2$ Н, $M = 9$ Нм.

С3. 30.



$F = 25$ Н, $P = 2$ Н, $M = 8$ Нм.

Пример решения

Задача. Конструкция состоит из прямоугольной пластины и жесткого уголка, изогнутого под прямым углом (рис. 19). Опора A конструкции является неподвижным шарниром, две другие — опорные стержни (вертикальный B и горизонтальный C). Тела соединены двумя невесомыми стержнями. Размеры даны в метрах. Определить реакции опор (в ньютонах). Дано: $F = 5$ Н, $P = 6$ Н, $M = 7$ Нм, $\cos\alpha = 0{,}8$.

Решение

Рассмотрим равновесие конструкции. Отбросим внешние связи, заменив их действие реакциями X_A, Y_A, R_B, R_C (рис. 20).

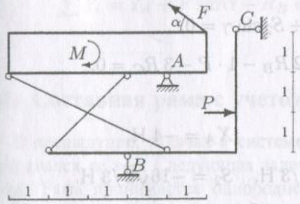


Рис. 19

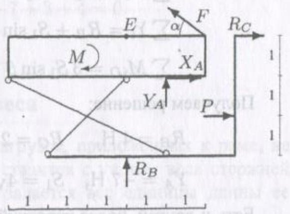


Рис. 20

Получается четыре неизвестные реакции. Попытки составить четыре уравнения равновесия для всей системы в целом ни к чему не приведут: определитель такой системы будет равен нулю (независимых уравнений равновесия для одного тела на плоскости только три). Остается разъединить пластину и уголок, сняв соединяющие их стержни и заменив их действие реакциями. При этом надо следить, чтобы соответствующие реакции к разным частям должны быть направлены в противоположные стороны. Соединительные стержни не загружены внешними силами (важно, что их вес по условию задачи не учитывается), поэтому реакции стержней направлены вдоль них (рис. 21, 22). Рассмотрим равновесие каждой из получившихся частей.

Уравнения равновесия пластины (рис. 21):

$$\sum X_i = X_A + S_1\cos\beta - S_2\cos\gamma - F\cos\alpha = 0,$$

$$\sum Y_i = Y_A - S_1\sin\beta - S_2\sin\gamma + F\sin\alpha = 0,$$

$$\sum M_{iA} = 4\,S_1\sin\beta + 1\cdot S_2\sin\gamma - M + 1\cdot F\sin\alpha + 1\cdot F\cos\alpha = 0,$$

где $\gamma = \pi/4$, $\sin\beta = 1/\sqrt{5}$, $\cos\beta = 2/\sqrt{5}$.

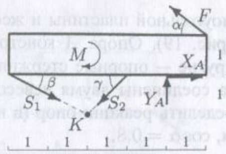


Рис. 21

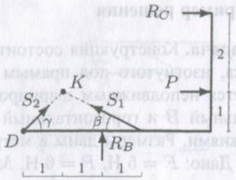


Рис. 22

Уравнения равновесия уголка (рис. 22):

$$\sum X_i = R_C - S_1\cos\beta + S_2\cos\gamma + P = 0,$$

$$\sum Y_i = R_B + S_1\sin\beta + S_2\sin\gamma = 0,$$

$$\sum M_{iD} = 3\,S_1\sin\beta + 2\,R_B - 1\cdot P - 3\,R_C = 0.$$

Получаем решение:

$$R_B = 4\text{ Н},\quad R_C = 2\text{ Н},\quad X_A = -4\text{ Н},$$

$$Y_A = -7\text{ Н},\quad S_1 = 4\sqrt{5}/3\text{ Н},\quad S_2 = -16\sqrt{2}/3\text{ Н}.$$

Есть и другой, более короткий, способ решения. Найдем две характерные точки конструкции. Первая точка (фиктивный шарнир) есть точка E пересечения линий действия реакций опор C и B. Такой же фиктивный шарнир K находится на пересечении стержней, соединяющих пластину и уголок. Составим две отдельные системы уравнений равновесия. Обе системы состоят из уравнений моментов. Первая система для определения реакций X_A и Y_A содержит уравнение моментов относительно точки E для всей конструкции в целом (рис. 20) и — сумму моментов относительно точки K для пластины (рис. 21):

$$\sum M_{iE} = 1\cdot X_A + 1\cdot Y_A + 2\,F\sin\alpha - M + 2\,P = 0,$$

$$\sum M_{iK} = -1\cdot X_A + 2\,Y_A + 3\,F\sin\alpha + 2\,F\cos\alpha - M = 0.$$

Заметим, что площадь треугольника AKE равна удвоенному определителю этой системы уравнений [1]. Получаем решение: $X_A = -4$ Н, $Y_A = -7$ Н. Аналогично составляем другую систему уравнений. Одно уравнение моментов для уголка относительно фиктивного сочленяющего

[1] Отсюда ясно, что в неизменяемой конструкции три характерные точки (две шарнирные опоры и сочленяющий шарнир) не лежат на одной прямой. В данной задаче сочленяющий шарнир фиктивный — точка пересечения линий действия реакций сочленяющих стержней.

шарнира K, а другое — опять для всей системы, но уже относительно точки A:

$$\sum M_{iK} = 1\cdot R_B - 2\,R_C = 0,$$

$$\sum M_{iA} = 1\cdot F\sin\alpha + 1\cdot F\cos\alpha - 1\cdot R_B - 1\cdot R_C + 1\cdot P - M = 0.$$

Получаем решение: $R_B = 4$ Н, $R_C = 2$ Н. В этом решении использовались только уравнения моментов, поэтому для проверки особенно эффективно и просто составить уравнения проекций для всей системы в целом

$$\sum X_i = X_A - F\cos\alpha + R_C + P = -4 - 4 + 2 + 6 = 0,$$

$$\sum Y_i = Y_A + F\sin\alpha + R_B = -7 + 3 + 4 = 0.$$

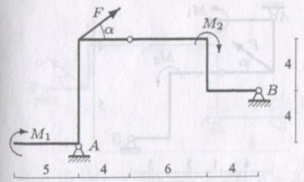
С4. Составная рама с учетом веса

В предыдущих задачах в системе нагрузок, приложенных к раме, не учитывался ее вес. Следующая задача ставится с учетом веса стержней рамы. Рама принимается однородной, задается вес единицы длины ее стержней.

Условия задач

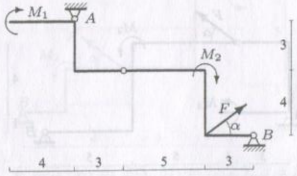
Плоская рама, состоящая из двух шарнирно соединенных частей, расположена в вертикальной плоскости. К раме приложены два сосредоточенных момента и наклонная сила. Опорами служат два неподвижных шарнира. Задан погонный вес ρ стержней рамы (в кН/м), $\cos\alpha = 0{,}8$. Размеры даны в метрах, силы — в кН, моменты — в кНм. Определить реакции опор рамы.

С4.1.



$F = 5$, $M_1 = 325$, $M_2 = 330$, $\rho = 2$.

С4.2.



$F = 10$, $M_1 = 9{,}5$, $M_2 = 118$, $\rho = 1$.

будут направлены в одну сторону, на правую — в противоположную (рис. 28, 29). Эти направления согласуются с правилом строительной

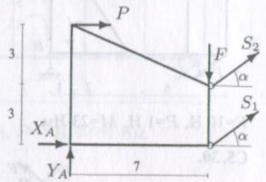


Рис. 28

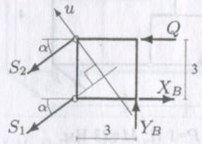


Рис. 29

механики и сопротивления материалов, по которому растянутые стержни имеют положительные усилия. Заметим однако, что в данном решении следовать этому правилу не обязательно.

Рассмотрим правую пластину, рис. 29. Единственно возможное уравнение равновесия пластины, в которое не входят S_1 и S_2, это уравнение проекций на ось u, перпендикулярную стержням 1 и 2:

$$\sum F_{iu} = -X_B \sin\alpha + Y_B \cos\alpha + Q \sin\alpha = 0, \qquad (1.16)$$

где $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = 4/5$. Второе уравнение, содержащее X_B и Y_B, составим для всей системы в целом (рис. 30). Имеем сумму моментов всех внешних сил относительно опоры A:

$$\sum M_{iA} = -3\,X_B + 14\,Y_B + 6\,Q - 6\,P - 7\,F = 0. \qquad (1.17)$$

Решаем систему двух уравнений (1.16), (1.17) с двумя неизвестными. Получаем реакции: $X_B = 13$ Н, $Y_B = 6$ Н. Аналогично поступаем и при определении реакций опоры A. Для левой пластины (рис. 28) составляем уравнение проекций на ось u, для всей конструкции в целом — сумму моментов относительно опоры B:

$$\begin{aligned} &\sum F_{iu} = -X_A \sin\alpha + Y_A \cos\alpha - P \sin\alpha - F \cos\alpha = 0, \\ &\sum M_{iB} = 3\,X_A - 14\,Y_A - 3\,P + 7\,F + 3\,Q = 0. \end{aligned} \qquad (1.18)$$

Решаем систему уравнений (1.18). Получаем реакции опоры A:

$$X_A = -17 \text{ Н}, \; Y_A = -3 \text{ Н}.$$

Проверим сумму моментов всех сил, приложенных к конструкции, относительно точки K (рис. 30).

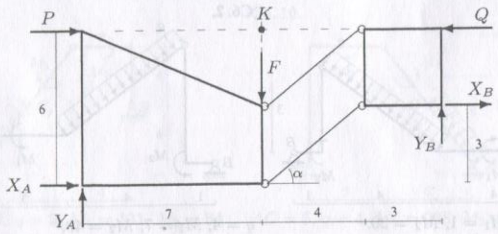


Рис. 30

Если задача решена верно, то сумма моментов должна быть равна нулю. Точка K, лежащая на пересечении линий действия всех внешних сил, очень удобна для проверки. Сумма становится на три слагаемых короче, причем это те слагаемые, которые проверять не надо — заданные силы. Имеем

$$\sum M_{iK} = 6\,X_A - 7\,Y_A + 7\,Y_B + 3\,X_B = -102 + 21 + 42 + 39 = 0.$$

Задача решена верно, сумма, действительно, равна нулю.

Заметим, что составление стандартной системы уравнений равновесия из шести уравнений (по три уравнения для каждой из пластин) приводит к трудностям технического порядка — решать такую систему вручную довольно-таки сложно, так как неизвестные S_1 и S_2 входят в четыре уравнения из шести.

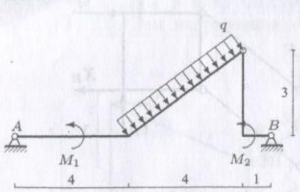
С6. Составная рама с распределенной нагрузкой

Если на тело действует не сосредоточенная сила, а нагрузка, распределенная по длине, площади или объему тела, то ее действие характеризуют величиной, отнесенной соответственно к длине, площади или объему тела, где эта нагрузка приложена.

Условия задач

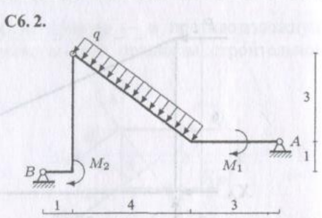
Рама состоит из двух частей, соединенных шарнирно. На раму действуют сосредоточенные моменты и распределенная нагрузка, приложенная к наклонному стержню рамы. Размеры даны в метрах, моменты в кНм, распределенные нагрузки в кН/м. Определить реакции опор.

С6. 1.



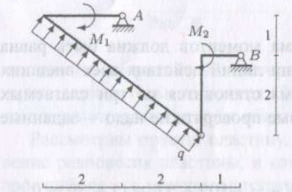
$q = 2,\ M_1 = 1,\ M_2 = 20.$

С6. 2.



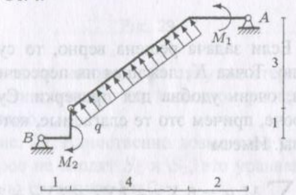
$q = 4,\ M_1 = 7,\ M_2 = 49.$

С6. 3.



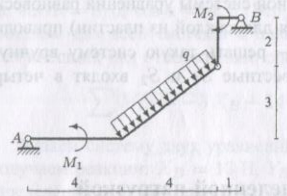
$q = 4,\ M_1 = 3,\ M_2 = 31.$

С6. 4.



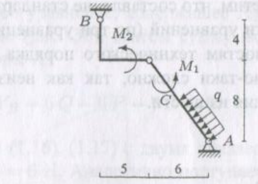
$q = 6,\ M_1 = 3,\ M_2 = 28.$

С6. 5.



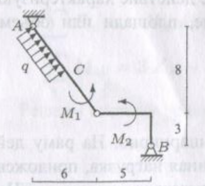
$q = 2,\ M_1 = 2,\ M_2 = 15.$

С6. 6.



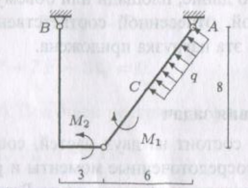
$AC = 5,\ q = 2,\ M_1 = 43,\ M_2 = 30.$

С6. 7.



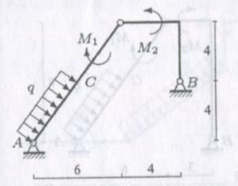
$AC = 5,\ q = 4,\ M_1 = 128,\ M_2 = 86.$

С6. 8.



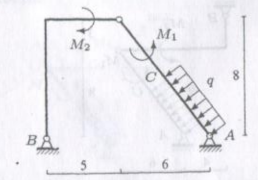
$AC = 5,\ q = 2,\ M_1 = 3,\ M_2 = 82.$

С6. 9.



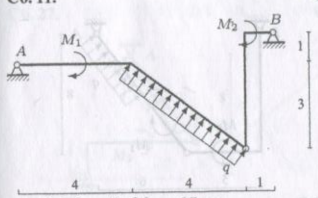
$AC = 5,\ q = 2,\ M_1 = 131,\ M_2 = 64.$

С6. 10.



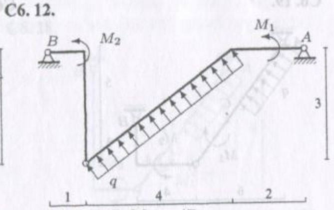
$AC = 5,\ q = 4,\ M_1 = 238,\ M_2 = 244.$

С6. 11.



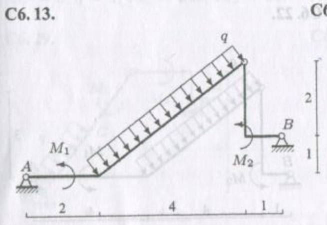
$q = 2,\ M_1 = 2,\ M_2 = 15.$

С6. 12.



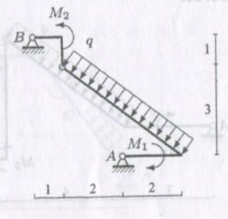
$q = 6,\ M_1 = 6,\ M_2 = 47.$

С6. 13.



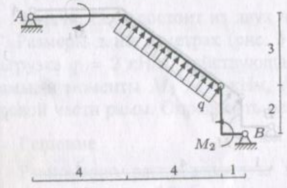
$q = 6,\ M_1 = 3,\ M_2 = 20.$

С6. 14.



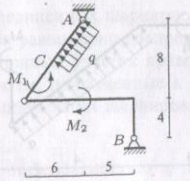
$q = 8,\ M_1 = 5,\ M_2 = 4.$

С6. 15.



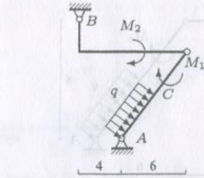
$q = 2,\ M_1 = 5,\ M_2 = 13.$

С6. 16.



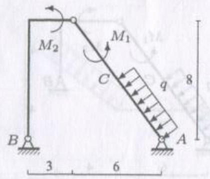
$AC = 5,\ q = 2,\ M_1 = 149,\ M_2 = 78.$

С6. 17.



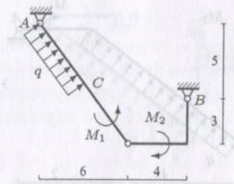
$AC = 5$, $q = 2$, $M_1 = 173$, $M_2 = 62$.

С6. 18.



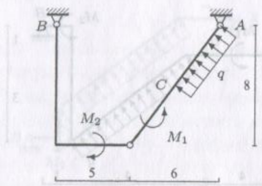
$AC = 5$, $q = 2$, $M_1 = 3$, $M_2 = 26$.

С6. 19.



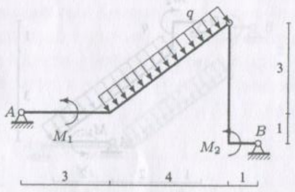
$AC = 5$, $q = 2$, $M_1 = 25$, $M_2 = 50$.

С6. 20.



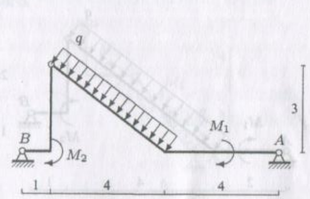
$AC = 5$, $q = 2$, $M_1 = 13$, $M_2 = 54$.

С6. 21.



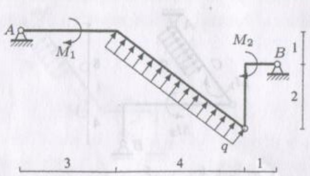
$q = 4$, $M_1 = 7$, $M_2 = 49$.

С6. 22.



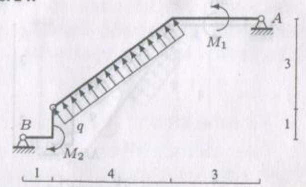
$q = 2$, $M_1 = 7$, $M_2 = 14$.

С6. 23.



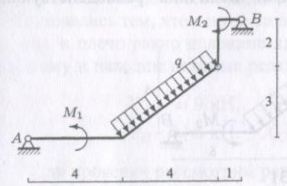
$q = 4$, $M_1 = 7$, $M_2 = 21$.

С6. 24.



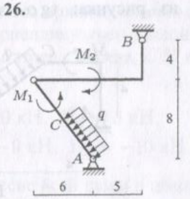
$q = 4$, $M_1 = 2$, $M_2 = 20$.

С6. 25.



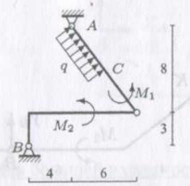
$q = 2$, $M_1 = 4$, $M_2 = 18$.

С6. 26.



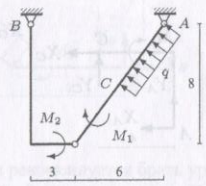
$AC = 5$, $q = 2$, $M_1 = 299$, $M_2 = 146$.

С6. 27.



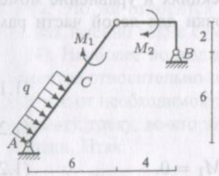
$AC = 5$, $q = 4$, $M_1 = 248$, $M_2 = 26$.

С6. 28.



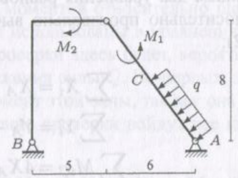
$AC = 5$, $q = 2$, $M_1 = 3$, $M_2 = 26$.

С6. 29.



$AC = 5$, $q = 2$, $M_1 = 119$, $M_2 = 96$.

С6. 30.



$AC = 5$, $q = 2$, $M_1 = 163$, $M_2 = 122$.

Пример решения

Задача. Рама состоит из двух частей, соединенных шарнирно в точке C. Размеры даны в метрах (рис. 31). Задана равномерно распределенная нагрузка $q = 2$ кН/м, действующая на наклонный участок правой части рамы, и моменты $M_1 = 4$ кНм, $M_2 = 2$ кНм, приложенные к левой и правой части рамы. Определить реакции неподвижных шарниров A и B.

Решение

Равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменим ее равнодействующей Q, приложенной к середине наклонного участка, на который она действует под углом α к горизонту. Угол наклона определяем из рисунка: $\operatorname{tg}\alpha = 4/3$. Величина равнодействующей

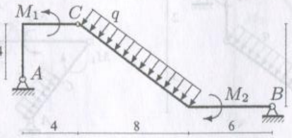


Рис. 31

пропорциональна длине участка и равна $Q = 10q = 20$ кН. Составную раму разобьем по шарниру C на две части (рис. 32, 33).

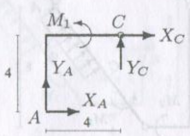


Рис. 32

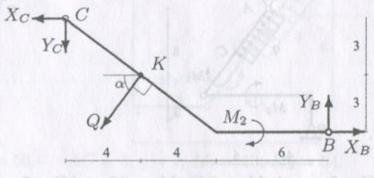


Рис. 33

Запишем два уравнения равновесия в проекциях и уравнение моментов относительно произвольно выбранной точки для левой части рамы (рис. 32):

$$\sum X_i = X_A + X_C = 0, \tag{1.19}$$

$$\sum Y_i = Y_A + Y_C = 0, \tag{1.20}$$

$$\sum M_{iC} = 4X_A - 4Y_A + M_1 = 0. \tag{1.21}$$

Рассматривая равновесие правой части, не забываем, что реакции сочленяющего шарнира направлены в сторону, противоположную реакциям левой части (рис. 33).

Аналогично составляем уравнения равновесия правой части рамы:

$$\sum X_i = X_B - X_C - Q\cos\alpha = 0, \tag{1.22}$$

$$\sum Y_i = Y_B - Y_C - Q\sin\alpha = 0, \tag{1.23}$$

$$\sum M_{iC} = 6\,X_B + 14\,Y_B - 5\,Q - M_2 = 0, \tag{1.24}$$

где $\sin\alpha = 4/5$, $\cos\alpha = 3/5$. Заметим, что при нахождении момента силы Q относительно точки C не пришлось раскладывать ее на вертикальную

и горизонтальную составляющие, как это принято обычно. Здесь мы воспользовались тем, что вектор силы перпендикулярен наклонному стержню рамы, и плечо равно половине длины этого стержня, $CK = 5$ м. Решаем систему и находим искомые реакции:

$$\begin{aligned} X_A &= 9 \text{ кН}, \quad Y_A = 10 \text{ кН}, \quad X_B = 3 \text{ кН}, \\ Y_B &= 6 \text{ кН}, \quad X_C = -9 \text{ кН}, \quad Y_C = -10 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для проверки рассмотрим равновесие всей рамы в целом (рис. 34).

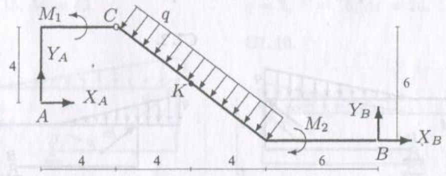


Рис. 34

Для большей надежности проверки не рекомендуется брать уравнения, являющиеся простой линейной комбинацией уже имеющихся. Например, если для всей системы записать уравнения проекций на оси x или y, то получим сумму соответствующих уравнений, составленных для частей рамы. Это же относится и к сумме моментов относительно шарнира C, так как именно такие суммы и были использованы в уравнениях (1.21) и (1.24). Наиболее подходящим для проверки здесь будет, вероятно, сумма моментов относительно точки приложения силы Q. Во-первых, это избавляет нас от необходимости искать момент этой силы, так как она проходит через эту точку, во-вторых, в уравнение проверки войдут все найденные реакции. Итак:

$$\begin{aligned} \sum M_{iK} &= 1\,X_A - 8\,Y_A + 10\,Y_B + 3\,X_B + M_1 - M_2 = \\ &= 9 - 80 + 60 + 9 + 4 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Замечание. Задачу можно решить по более простой схеме, составив всего четыре уравнения моментов. Два уравнения составляем для частей рамы. Это уравнения (1.21) и (1.24). Еще два уравнения (суммы моментов относительно опор A и B) записываем для всей рамы в целом (рис. 34). В полученную систему войдут только реакции X_A, Y_A, X_B и Y_B.

С7. Рама с линейно распределенной нагрузкой

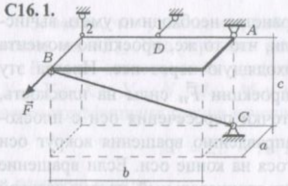
Распределенная нагрузка не обязательно должна быть равномерной. В данной задаче нагрузка распределена по участку рамы. Задачи с такой

С16. Равновесие полки

Условия задач

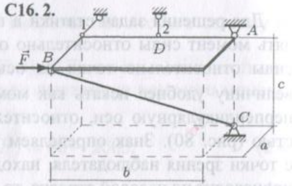
Горизонтальная прямоугольная полка весом G закреплена в точке A на сферической опоре и поддерживается наклонной подпоркой BC и двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам стержнями (горизонтальным 1 и вертикальным 2). Вдоль одного из ребер полки действует известная сила F. Определить реакции опор полки.

С16.1.



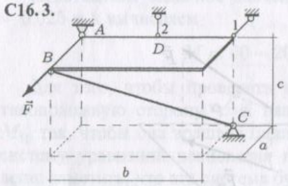
$AD = 1$ м, G=4 кН, F=1 кН,
$a = b = 2$ м, $c = 1$ м.

С16.2.



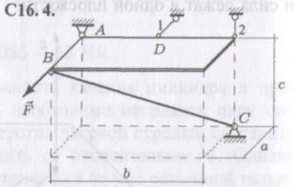
$AD = 1$ м, G=6 кН, F=2 кН,
$a = b = 2$ м, $c = 1$ м.

С16.3.



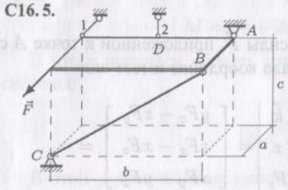
$AD = 1$ м, G=2 кН, F=4 кН,
$a = b = 2$ м, $c = 1$ м.

С16.4.



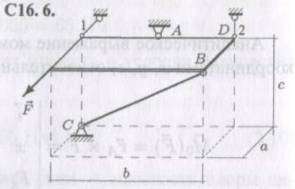
$AD = 1$ м, G=2 кН, F=2 кН,
$a = b = 2$ м, $c = 1$ м.

С16.5.



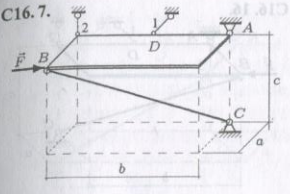
$AD = 2$ м, G=6 кН, F=4 кН,
$a = b = 4$ м, $c = 3$ м.

С16.6.



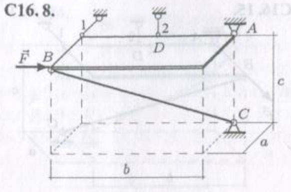
$AD = 1$ м, G=6 кН, F=1 кН,
$a = b = 2$ м, $c = 1$ м.

С16.7.



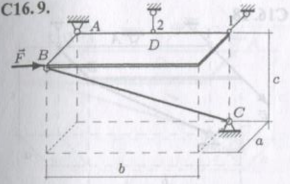
$AD = 4$ м, G=6 кН, F=8 кН,
$a = 4$ м, $b = 8$ м, $c = 1$ м.

С16.8.



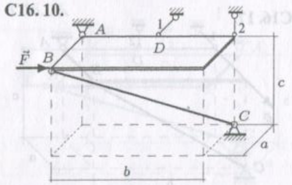
$AD = 4$ м, G=6 кН, F=8 кН,
$a = 4$ м, $b = 8$ м, $c = 1$ м.

С16.9.



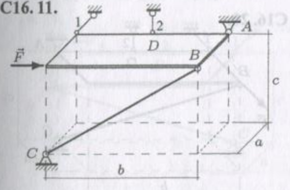
$AD = 4$ м, G=6 кН, F=2 кН,
$a = 4$ м, $b = 8$ м, $c = 1$ м.

С16.10.



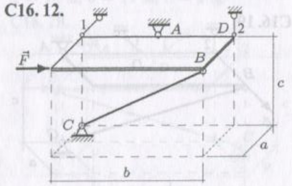
$AD = 4$ м, G=6 кН, F=1 кН,
$a = 4$ м, $b = 8$ м, $c = 1$ м.

С16.11.



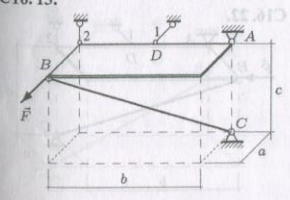
$AD = 1$ м, G=16 кН, F=3 кН,
$a = b = 3$ м, $c = 4$ м.

С16.12.



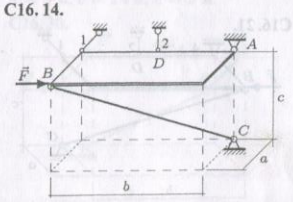
$AD = 4$ м, G=2 кН, F=1 кН,
$a = 4$ м, $b = 8$ м, $c = 1$ м.

С16.13.



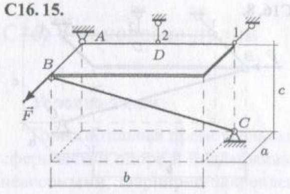
$AD = 3$ м, G=4 кН, F=2 кН,
$a = 3$ м, $b = 6$ м, $c = 2$ м.

С16.14.



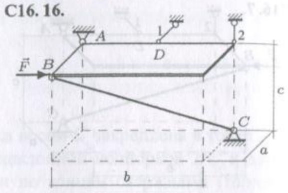
$AD = 3$ м, G=8 кН, F=6 кН,
$a = 3$ м, $b = 6$ м, $c = 2$ м.

C16.15.



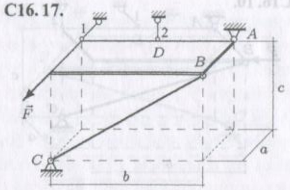
$AD = 3$ м, G=8 кН, F=1 кН,
$a = 3$ м, $b = 6$ м, $c = 2$ м.

C16.16.



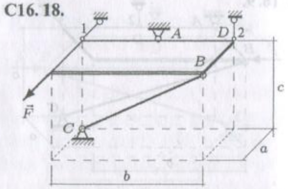
$AD = 4$ м, G=4 кН, F=1 кН,
$a = 6$ м, $b = 9$ м, $c = 2$ м.

C16.17.



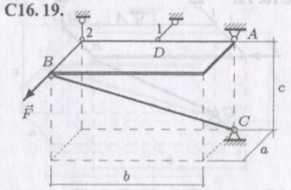
$AD = 3$ м, G=16 кН, F=1 кН,
$a = 12$ м, $b = 6$ м, $c = 8$ м.

C16.18.



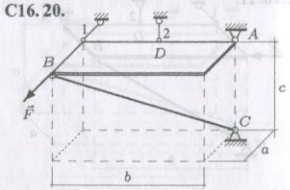
$AD = 4$ м, G=32 кН, F=5 кН,
$a = 6$ м, $b = 9$ м, $c = 2$ м.

C16.19.



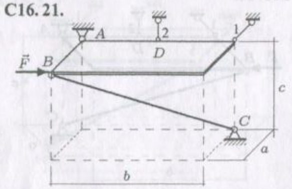
$AD = 3$ м, G=16 кН, F=3 кН,
$a = 4$ м, $b = 7$ м, $c = 4$ м.

C16.20.



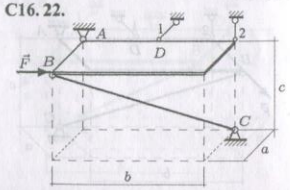
$AD = 3$ м, G=8 кН, F=7 кН,
$a = 4$ м, $b = 7$ м, $c = 4$ м.

C16.21.



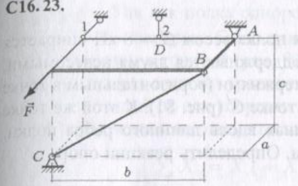
$AD = 3$ м, G=48 кН, F=7 кН,
$a = 4$ м, $b = 7$ м, $c = 4$ м.

C16.22.



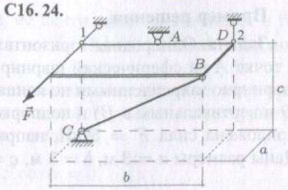
$AD = 3$ м, G=12 кН, F=2 кН,
$a = 6$ м, $b = 7$ м, $c = 6$ м.

C16.23.



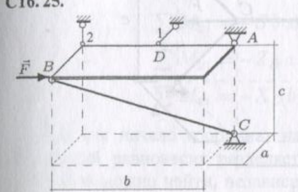
$AD = 12$ м, G=42 кН, F=2 кН,
$a = 29$ м, $b = 24$ м, $c = 7$ м.

C16.24.



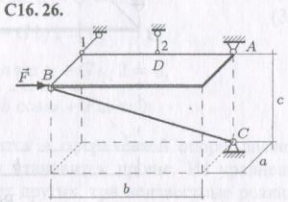
$AD = 3$ м, G=36 кН, F=4 кН,
$a = 6$ м, $b = 7$ м, $c = 6$ м.

C16.25.



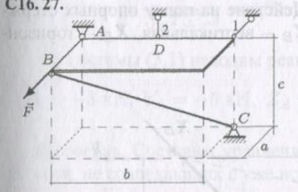
$AD = 5$ м, G=4 кН, F=5 кН,
$a = 10$ м, $b = 11$ м, $c = 2$ м.

C16.26.



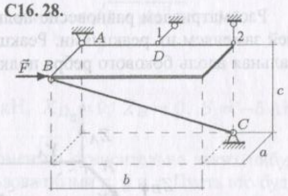
$AD = 5$ м, G=4 кН, F=22 кН,
$a = 10$ м, $b = 11$ м, $c = 2$ м.

C16.27.



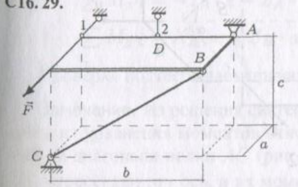
$AD = 7$ м, G=4 кН, F=1 кН,
$a = 5$ м, $b = 14$ м, $c = 2$ м.

C16.28.



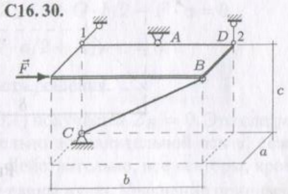
$AD = 7$ м, G=112 кН, F=7 кН,
$a = 5$ м, $b = 14$ м, $c = 2$ м.

C16.29.



$AD = 6$ м, G=10 кН, F=2 кН,
$a = 14$ м, $b = 12$ м, $c = 5$ м.

C16.30.



$AD = 3$ м, G=36 кН, F=6 кН,
$a = 7$ м, $b = c = 6$ м.

Пример решения

Задача. Однородная горизонтальная полка весом $G = 8$ кН опирается в точке A на сферический шарнир и поддерживается двумя невесомыми, шарнирно закрепленными по концам, стержнями (горизонтальным в точке D и вертикальным в B) и подпоркой в точке C (рис. 81). К этой же точке приложена сила $F = 5$ кН, направленная вдоль длинного ребра полки. Даны размеры $a = 3$ м, $b = 5$ м, $c = 4$ м. Определить реакции опор.

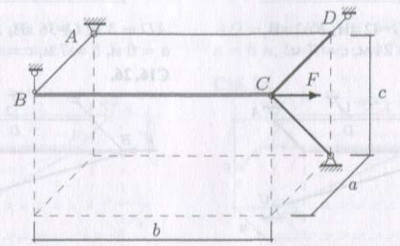


Рис. 81

Решение

Рассматриваем равновесие полки. Действие на полку опорных стержней заменяем их реакциями. Реакция Z_B — вертикальная, X_D — горизонтальная вдоль бокового ребра полки.

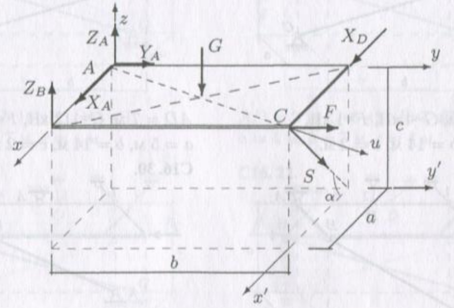


Рис. 82

Усилие $\vec{S}$ в подпорке направлено вдоль стержня. Сферический шарнир A имеет три составляющие реакции $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$, направленные по осям

координат. Так как полка однородная, ее центр тяжести совпадает с геометрическим центром. Сюда приложен вес $\vec{G}$. Начало системы координат xyz помещаем в точку A (рис. 82).

Составляем систему уравнений равновесия, состоящую из трех уравнений проекций на оси координат всех сил, действующих на полку, и трех уравнений моментов относительно этих же осей:

$$
\begin{aligned}
&\sum X_i = X_A + X_D - S\cos\alpha = 0,\\
&\sum Y_i = Y_A + F = 0,\\
&\sum Z_i = Z_A + Z_B - S\sin\alpha - G = 0,\\
&\sum M_{xi} = -S\,b\,\sin\alpha - G\,b/2 = 0,\\
&\sum M_{yi} = -Z_B\,a + S\,a\sin\alpha + G\,a/2 = 0,\\
&\sum M_{zi} = -X_D\,b + S\,b\,\cos\alpha + F\,a = 0.
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Так как начало координат находится в сферической опоре, система уравнений равновесия разделяется и становится проще. Из уравнений моментов можно найти, независимо от других, три неизвестные реакции S, X_D и Z_B.

Вычисляем значения тригонометрических функций:

$$\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 4/5 = 0{,}8, \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = 0{,}6.$$

Из системы (3.1) находим реакции:

$$X_A = -3 \text{ кН},\ Y_A = -5 \text{ кН},\ Z_A = 4 \text{ кН},\ X_D = 0,\ Z_B = 0,\ S = -5 \text{ кН}.$$

Проверка. Составим уравнение моментов относительно каких-нибудь из осей, не совпадающих с уже использованными x, y и z. Пусть это будут оси x' и y', проведенные параллельно соответствующим осям исходной системы координат:

$$
\begin{aligned}
&\sum M_{x'i} = -Y_A \cdot c - Z_A \cdot b - Z_B \cdot b + G \cdot b/2 - F \cdot c = 0,\\
&\sum M_{y'i} = X_A \cdot c - Z_B \cdot a + G \cdot a/2 + X_D \cdot c = 0.
\end{aligned}
$$

Проверка подтверждает правильность решения.

Замечание. Из решения системы (3.1) получается $Z_B = 0$. Это следует сразу из уравнения моментов относительно дополнительной оси u, лежащей на диагонали полки AC (рис. 82). Действительно, все векторы, кроме $\vec{Z}_B$, пересекают эту ось, и их моменты равны нулю. Уравнение принимает простой вид $\sum M_u = Z_B \cdot h = 0$, где h — некоторое плечо реакции $\vec{Z}_B$ относительно диагональной оси u. Не вычисляя $h \neq 0$, получаем $Z_B = 0$.